KURS PRZYGOTOWAWCZY DO EGZAMINU NA MAKLERA GIEŁD TOWAROWYCH

MATEMATYKA FINANSOWA

Radosław Matys

Warszawa, 24 listopada 2007

Harmonogram kursu „Matematyka finansowa”

1. Procent prosty i procent składany.
2. Stopa procentowa nominalna i efektywna.
3. Wartość pieniądza w czasie – wartość przyszła, wartość bieżąca.
4. Wartość przyszła renty.
5. Wartość bieżąca renty.
6. Wartość bieżąca renty wieczystej.
7. Inflacja a wartość pieniądza w czasie (realna stopa zwrotu).
8. Oprocentowanie nominalne i efektywne kredytu.
9. Metody spłaty kredytu.

1. Procent prosty i procent składany.

Procent prosty to sposób oprocentowania kapitału, polegający na tym, że odsetki nie są doliczane do wartości początkowej kapitału i nie procentują wraz z nim w kolejnym okresie bazowym. Odsetki proste są płatne z dołu po zakończeniu okresu trwania lokaty.

Wartość końcowa kapitału przy zastosowaniu procentu prostego jest równa:

$$\mathbf{FV = PV + I_S = PV \times (1 + i \times n)}$$

Natomiast odsetki proste określone są wzorem:

$$\mathbf{I_S = PV \times i \times n}$$

gdzie:

I_S - odsetki proste za całkowity czas trwania lokaty (simple interest),
PV - początkowa wartość kapitału (present value),
FV - końcowa wartość kapitału po upływie n okresów bazowych (future value),
i - stopa procentowa lokaty za jeden okres bazowy,
n - liczba okresów bazowych trwania lokaty.

Procent składany to sposób oprocentowania kapitału, polegający na tym, że odsetki są doliczane do wartości początkowej kapitału i procentują wraz z nim w kolejnym okresie bazowym. Odsetki otrzymane po upływie każdego okresu bazowego są natychmiast reinwestowane na tych samych warunkach co kapitał początkowy (odsetki są kapitalizowane – dopisywane do kapitału).

Wartość końcowa kapitału przy zastosowaniu procentu składanego jest równa:

$$\mathbf{FV = PV + I_C = PV \times (1 + i)^n}$$

Natomiast odsetki składane określone są wzorem:

$$\mathbf{I_C = PV \times [(1 + i)^n - 1]}$$

gdzie:

I_C - odsetki składane za całkowity czas trwania lokaty (compounded interest),
PV - początkowa wartość lokaty (present value),
FV - końcowa wartość lokaty po upływie n okresów bazowych (future value),
i - stopa procentowa lokaty za jeden okres bazowy,
n - liczba okresów bazowych trwania lokaty.

2. Stopa procentowa nominalna i efektywna.

Nominalna stopa procentowa oznacza stopę procentowa obliczoną przy zastosowaniu procentu prostego. Natomiast **efektywna stopa procentowa** określa rzeczywiste oprocentowanie kapitału wynikające z zastosowania nominalnej stopy procentowej oraz sposobu kapitalizowania odsetek.
Jeżeli odsetki są kapitalizowane raz do roku, to efektywna roczna stopa procentowa będzie równa nominalnej rocznej stopie procentowej. Natomiast jeśli odsetki będą kapitalizowane częściej niż raz do roku, to efektywna roczna stopa procentowa będzie wyższa niż nominalna roczna stopa procentowa.

Stopa procentowa w jednym okresie bazowym określona jest wzorem:

$$\mathbf{i = NRSP / n}$$

gdzie:
i - stopa procentowa za jeden okres bazowy,
NRSP - nominalna roczna stopa procentowa,
n - liczba okresów bazowych w roku.

Wzór na efektywną roczną stopę procentową ma postać:

$$ERSP = (1 + i)^{n} - 1$$

$$ERSP = (1 + NRSP / n)^{n} - 1$$

gdzie:
ERSP - efektywna roczna stopa procentowa,
NRSP - nominalna roczna stopa procentowa,
i - stopa procentowa za jeden okres bazowy,
n - liczba kapitalizacji w roku (liczba okresów bazowych w roku).

W sytuacji gdy liczba okresów bazowych n dąży do nieskończoności mamy do czynienia z **kapitalizacją ciągłą**. Wzór na efektywną roczną stopę procentową przy zastosowaniu ciągłej kapitalizacji odsetek przyjmuje postać:

$$ERSP_{C} = e^{NRSP} - 1$$

gdzie:
ERSPC - efektywna roczna stopa procentowa przy ciągłej kapitalizacji odsetek,
NRSP - nominalna roczna stopa procentowa,
e - podstawa logarytmu naturalnego.

3. Wartość pieniądza w czasie - wartość przyszła, wartość bieżąca.

Przyczyny zmiennej wartości pieniądza w czasie to:

1. Ryzyko.
2. Preferowanie bieżącej konsumpcji.
3. Możliwości zainwestowania.

Uwzględnienie zmiennej wartości pieniądza w czasie jest konieczne szczególnie w przypadku strumienia przepływów pieniężnych rozłożonych w czasie.

Do określenia wartości przyszłej stosuje się taki sam wzór jak w przypadku procentu składanego:

$$\mathbf{WP = WB \times (1 + i)^{n}}$$

gdzie:
WP - wartość przyszła,
WB - wartość bieżąca,
i - stopa procentowa za jeden okres bazowy,
n - liczba okresów bazowych.

Wzór ten określa zależność pomiędzy wartością posiadanego kapitału obecnie a jego wartością przyszłą po upływie n okresów bazowych przy stałej stopie procentowej i.

Do obliczenia wartości przyszłej pewnej kwoty można wykorzystać tablice mnożnika wartości przyszłej, którego wzór przyjmuje postać:

$$\mathbf{MWP = (1 + i)^{n}}$$

gdzie:
MWP - mnożnik wartości przyszłej,
i - stopa procentowa za jeden okres bazowy,
n - liczba okresów bazowych.

Natomiast wzór na wartość przyszłą przy użyciu tablic mnożnika wartości przyszłej ma postać:

$$\mathbf{WP = WB \times MWP\,(i, n)}$$

Interpretacja mnożnika:
Wartość przyszła jednej jednostki pieniężnej po upływie n okresów bazowych przy zastosowaniu stopy procentowej i.

Wartość bieżąca to wartość obietnicy otrzymania określonej kwoty w przyszłości. Wartość bieżąca jest mniejsza od wartości przyszłej tej kwoty.

Wzór na wartość bieżącą można otrzymać po przekształceniu wzoru na wartość przyszłą:

$$\mathbf{WB = WP / (1 + i)^{n}}$$

gdzie:
WB - wartość bieżąca,
WP - wartość przyszła,
i - stopa procentowa za jeden okres bazowy,
n - liczba okresów bazowych.

Do obliczenia wartości bieżącej pewnej kwoty można wykorzystać tablice mnożnika wartości bieżącej, którego wzór przyjmuje postać:

MWB = 1 / (1 + i) n

gdzie:
MWB - mnożnik wartości bieżącej,
i - stopa procentowa za jeden okres bazowy,
n - liczba okresów bazowych.

Natomiast wzór na wartość bieżącą przy użyciu tablic mnożnika wartości bieżącej ma postać:

$$\mathbf{WB = WP \times MWB\ (i, n)}$$

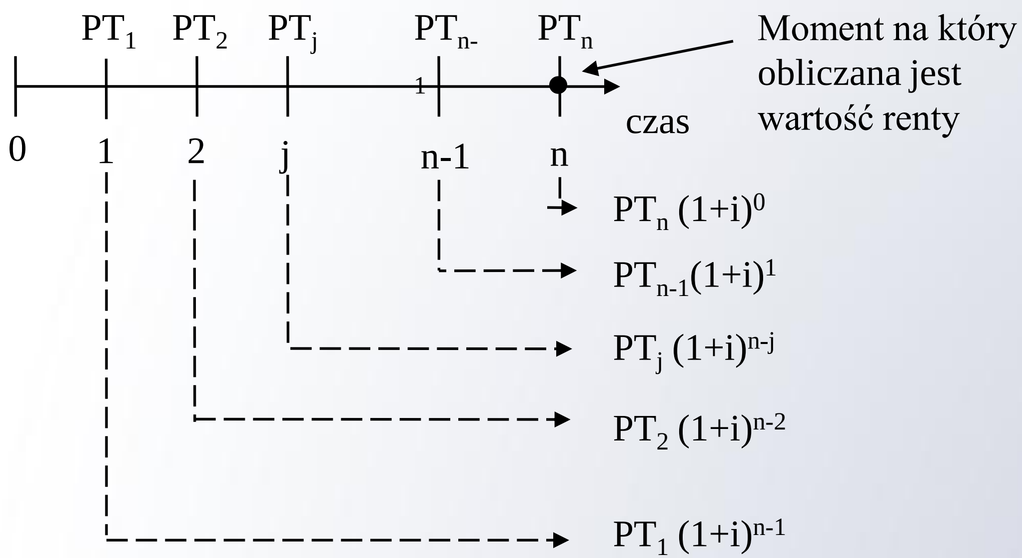
Interpretacja mnożnika:
Obecna wartość jednej jednostki pieniężnej jaką można otrzymać po upływie n okresów bazowych przy zastosowaniu stopy procentowej i.

Wartość bieżąca nazywana jest inaczej wartością zdyskontowaną, a czynnik wartości bieżącej nazywany jest czynnikiem dyskonta.

4. Wartość przyszła renty

Rentą nazywany jest strumień pieniężny składający się z okresowych równych płatności. Renta może być płatna z dołu, czyli na koniec każdego okresu bazowego (występuje najczęściej) lub płatna z góry, czyli na początek każdego okresu bazowego.

Aby policzyć wartość przyszłą **renty płatnej z dołu** należy najpierw obliczyć wartość przyszłą każdej płatności a następnie policzyć sumę wszystkich płatności.



Zatem wzór na wartość przyszłą renty płatnej z dołu przyjmie postać:

$$\mathbf{WPR = PT + PT \times (1 + i) + PT \times (1 + i)^2 + \ldots + PT \times (1 + i)^{n-1}}$$

A po przekształceniu:

$$\mathbf{WPR = PT \sum_{k=0}^{n-1} \times (1 + i)^k}$$

gdzie:
WPR - wartość przyszła renty,
PT - płatność raty (wartość każdej z rat renty),
i - stopa procentowa za jeden okres bazowy,
n - liczba okresów bazowych.

Do obliczania wartości przyszłej renty można wykorzystać tablice mnożnika wartości przyszłej renty, którego wzór ma postać:

$$\mathbf{MWPR = \sum_{k=0}^{n-1} (1 + i)^k}$$

gdzie MWPR oznacza mnożnik wartości przyszłej renty, a pozostałe symbole mają oznaczenia takie same jak we wzorze na wartość przyszłą renty.

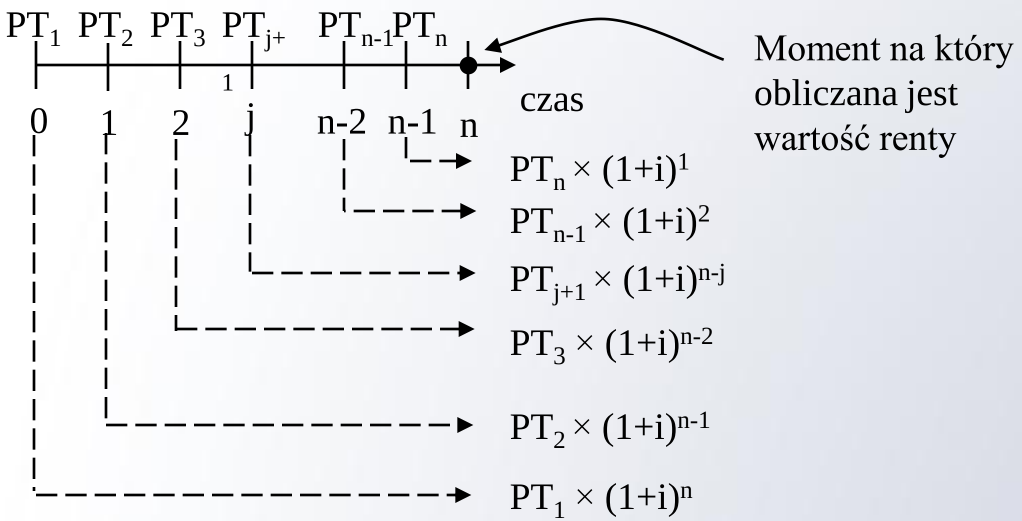
Wzór na mnożnik wartości przyszłej renty można przekształcić do następującej postaci:

$$\mathbf{MWPR = [(1 + i)^{n} - 1] / i}$$

Wzór na wartość przyszłą renty płatnej z dołu przy wykorzystaniu mnożnika wartości przyszłej renty ma postać:

$$\mathbf{WPR = PT \times MWPR\ (i, n)}$$

W przypadku renty **płatnej z góry**, czyli na początku każdego okresu, płatności niejako ulegają przesunięciu o jeden okresu w kierunku momentu bieżącego 0.



Wzór na wartość przyszłą renty płatnej z góry jest zatem następujący:

$$\mathbf{WPR_{begin} = PT \times (1 + i) + PT \times (1 + i)^{2} + \ldots + PT \times (1 + i)^{n}}$$

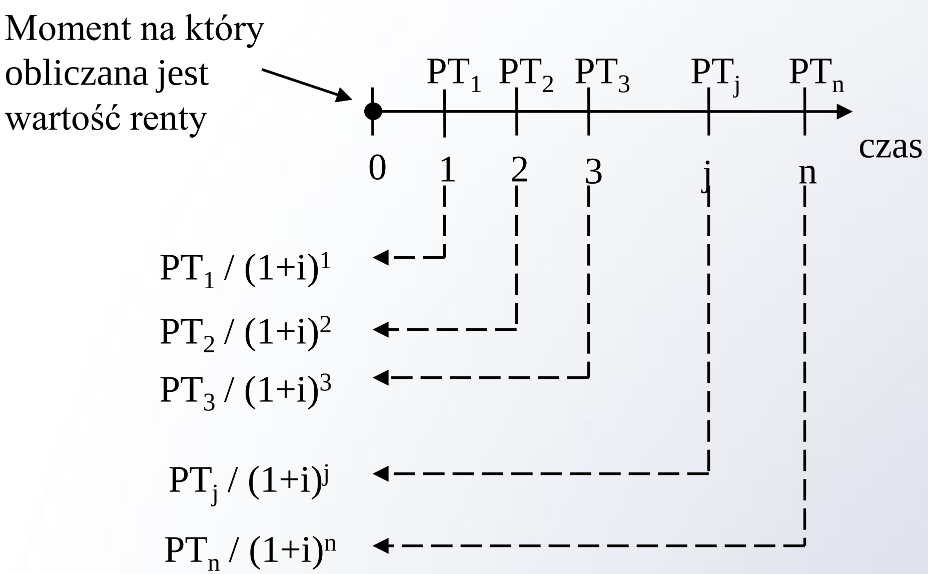
A po przekształceniu przyjmuje postać:

$$\mathbf{WPR_{begin} = PT \times MWPR \times (1 + i)} \quad \text{lub} \quad \mathbf{WPR_{begin} = WPR \times (1 + i)}$$

gdzie:
WPR_{begin} - wartość przyszła renty płatnej z góry,
PT - płatność raty (wartość każdej z rat renty),
MWPR - mnożnik wartości przyszłej renty (z tablic),
i - stopa procentowa za jeden okres bazowy.

5. Wartość bieżąca renty

W celu obliczenia wartości bieżącej renty **płatnej na koniec każdego okresu** (z dołu) należy określić wartość obecną każdej płatności a następnie policzyć ich sumę.



Wartość bieżąca renty płatnej na koniec każdego okresu można określić wzorem:

$$\mathbf{WBR = PT/(1 + i) + PT/(1 + i)^2 + ... + PT/(1 + i)^n}$$

A po przekształceniu otrzymujemy wzór:

$$\mathbf{WBR} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{PT} / (1 + i)^{k}$$

gdzie:
WBR - wartość bieżąca (obecna) renty,
PT - płatność raty (wartość każdej z rat renty),
i - stopa procentowa za jeden okres bazowy,
n - liczba okresów bazowych.

Do obliczania wartości bieżącej renty można wykorzystać tablice mnożnika wartości bieżącej renty, którego wzór ma postać:

$$\mathbf{MWBR} = \sum_{k=1}^{n} 1 / (1 + i)^{k}$$

gdzie MWBR oznacza mnożnik wartości bieżącej renty, a pozostałe symbole mają oznaczenia takie samem ja we wzorze na wartość bieżącą renty.

Wzór na mnożnik wartości bieżącej renty można przekształcić do następującej postaci:

$$\mathbf{MWBR} = [(1 + i)^{n} - 1] / [i \times (1 + i)^{n}]$$

Wzór na wartość bieżącą renty płatnej z dołu przy wykorzystaniu mnożnika wartości bieżącej renty ma postać:

$$\mathbf{WPR = PT \times MWPR\ (i,\ n)}$$

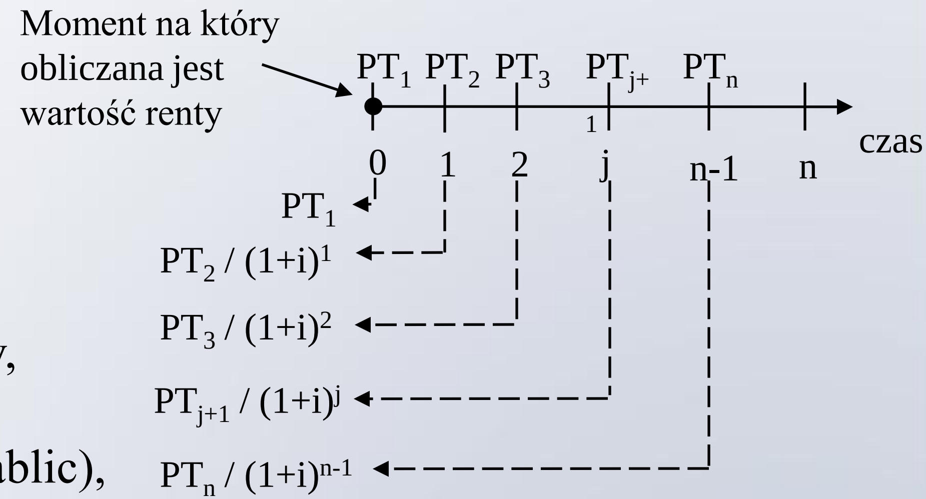
Wartość bieżącą renty **płatnej z góry** określona jest wzorem:

$$\mathbf{WBR_{begin} = PT + PT/(1 + i) + PT/(1 + i)^2 + \ldots + PT/(1 + i)^{n-1}}$$

Po przekształceniu otrzymamy wzory:

$$\mathbf{WBR_{begin} = WBR \times (1 + i)}$$

$$\mathbf{WBR_{begin} = PT \times MWBR \times (1 + i)}$$



gdzie:
WBR_{begin} - wartość bieżąca renty płatnej z góry,
PT - płatność raty (wartość każdej z rat renty),
MWBR - mnożnik wartości bieżącej renty (z tablic),
i - stopa procentowa za jeden okres bazowy.

6. Wartość bieżąca renty wieczystej

Renta wieczystą (dożywotnią) nazywany strumień równych płatności nieskończonych w czasie.

Wartość bieżąca renty wieczystej **płatnej na koniec każdego okresu** (z dołu) można zapisać w następującej postaci:

$$\mathbf{WBRW = PT/(1 + i) + PT/(1 + i)^2 + PT/(1 + i)^3 + ...}$$

oraz

$$\mathbf{WBRW = PT \times \sum_{k=1}^{\infty} 1/(1 + i)^k}$$

Wartość bieżącą renty wieczystej można opisać wzorem na wartość bieżącą renty (WBR = PT × MWBR) przy założeniu, że liczba okresów bazowych n dąży do nieskończoności. Można dowieść, że dla $n \to \infty$ mnożnik wartości bieżącej renty dąży do wartości 1/i. Ostatecznie wzór na wartość bieżącą renty wieczystej płatnej z dołu przyjmie postać:

$$\mathbf{WBRW = PT / i}$$

gdzie:
WBRW - wartość bieżąca (obecna) renty wieczystej,
PT - płatność raty (wartość każdej z rat renty),
i - stopa procentowa za jeden okres bazowy.

Wartość bieżąca renty wieczystej jest tym wyższa, im:

- większa jest renta,
- niższa jest stopa procentowa.

Natomiast w przypadku, gdy płatności rat dokonywane są **na początku każdego okresu** (z góry) wzór na wartość bieżącą renty wieczystej ma postać:

$$\mathbf{WBRW_{begin} = (1 + i) \times PT / i = PT / i + PT}$$

gdzie:

$WBRW_{begin}$ - wartość bieżąca renty wieczystej płatnej z góry,
PT - płatność raty (wartość każdej z rat renty),
i - stopa procentowa za jeden okres bazowy.

7. Inflacja a wartość pieniądza w czasie (realna stopa zwrotu).

Zależność pomiędzy nominalną stopą zwrotu a realną stopą zwrotu można przedstawić za pomocą równania:

$$\mathbf{1 + r_{nom} = (1 + r_{real}) \times (1 + r_{infl})}$$

Otrzymujemy zatem wzór na realną stopę zwrotu z inwestycji:

$$\mathbf{r_{real} = [(1 + r_{nom}) / (1 + r_{infl})] - 1}$$

gdzie:

r_{real} - realna stopa zwrotu,
r_{nom} - nominalna stopa zwrotu,
r_{infl} - stopa inflacji w analizowanym okresie.

Stopa zwrotu z akcji:

$$\mathbf{r = [D + (C_S - C_K)] / C_K}$$

gdzie:

r - stopa zwrotu z akcji,
D - dywidenda otrzymana z tytułu posiadania akcji,
C_S - cena sprzedaży akcji,
C_K - cena zakupu akcji.

8. Oprocentowanie nominalne i efektywne kredytu.

Efektywną (rzeczywistą) roczną stopę procentową oblicza się według następującego wzoru:

$$\sum_{K=1}^{n} \frac{A_K}{(1+i)^{t_K}} = \sum_{K'=1}^{n'} \frac{A_{K'}}{(1+i)^{t_{K'}}}$$

gdzie:

K – numer kolejnej wypłaty raty kredytu (jeżeli kredyt wypłacany jest w ratach)

K' – numer kolejnej spłaty kredytu lub kosztów (np. prowizji)

A_K – kwota wypłaty raty kredytu,

$A_{K'}$ – kwota spłaty kredytu lub kosztów,

n – numer ostatniej wypłaty kredytu (liczba płatności na rzecz kredytobiorcy),

n' – numer ostatniej spłaty kredytu lub kosztów (liczba płatności na rzecz banku),

t_K – okres pomiędzy pierwszą wypłatą i kolejnymi wypłatami raty kredytu (wyrażony w latach lub ułamkach lat),

$t_{K'}$ – okres pomiędzy pierwszą spłatą kredytu lub kosztów i kolejnymi spłatami (wyrażony w latach lub ułamkach lat),

i - efektywna (rzeczywista) stopa oprocentowania kredytu.

9. Metody spłaty kredytu

Rata płatności kredytu składa się z dwóch części: **raty kapitałowej i odsetek.**

Wyróżnia się dwie podstawowe metody spłaty kredytu:

- metoda równych rat kapitałowych,
- metoda równych kwot płatności kredytu.

Przy spłacie kredytu metodą **równych rat kapitałowych**, rata kapitałowa równa jest kwocie kredytu podzielonej przez liczbę rat kapitałowych, natomiast kwota odsetek maleje wraz z kolejnymi spłatami rat kapitałowych kredytu. Z tego względu metoda ta nazywana jest również metodą **malejących rat kredytowych** (rat płatności kredytu).

Wzór na j-tą ratę płatności kredytu ma postać:

$$\mathbf{R_j = RK + ODS_j = K / n + ODS_j}$$

gdzie:

R_j - j-ta rata płatności kredytu,

RK – rata kapitałowa (RK = const.),

ODS_j - odsetki płatne za j-ty okres odsetkowy,

K - kwota udzielonego kredytu,

n - liczba rat kapitałowych kredytu.

W przypadku spłaty kredytu metodą równych rat kapitałowych pierwsze raty są o wiele wyższe od ostatnich z uwagi na kwotę malejących odsetek. Przy zastosowaniu tej metody spłaty kredytu wymagana jest większa zdolność kredytowa.

Przy spłacie kredytu **metodą równych kwot płatności kredytu**, zmienia się wysokość zarówno raty kapitałowej (rośnie) jak i odsetek (maleją), natomiast rata płatności kredytu jest stała. Mamy zatem do czynienia ze stałymi płatnościami w czasie, analogicznie jak w przypadku renty. Z tego względu metoda równych kwot płatności kredytu nazywana bywa również metodą annuitetową (z. ang. annuity – renta).
Wzór na ratę płatności kredytu ma postać:

$$\mathbf{R = RK_j + ODS_j = WBR / MWBR}$$

gdzie:
R – rata płatności kredytu (R = const.),
RK_j - j-ta rata kapitałowa,
ODS_j - odsetki płatne za j-ty okres odsetkowy
WBR - wartość bieżąca renty (kwota udzielonego kredytu),
MWBR - mnożnik wartości bieżącej renty (z tablic).

Efektywna stopa oprocentowania kredytu w tej metodzie jest wyższa niż w metodzie równych rat kapitałowych, gdyż kapitał kredytu (zadłużenie) maleje wolniej.

Bibliografia:

1. Krzysztof Jajuga, Teresa Jajuga: Inwestycje. Instrumenty finansowe, ryzyko finansowe, inżynieria finansowa, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2000.
2. Maria Podgórska, Joanna Klimkowska: Matematyka finansowa, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2006.
3. Mieczysław Sobczyk: Matematyka finansowa. Podstawy teoretyczne, przykłady, zadania, Agencja Wydawnicza PLACET, Warszawa 1997.